

$$F(x, y, z) = z(x+y) + 4\cos(zy) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot (x+y) + z + 4 \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y \cdot \sin(zy) - 4z \sin(zy) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x \partial y} \cdot (x+y) + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} - 4 \frac{\partial z}{\partial y} y \sin(zy) - 4 \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} y^2 \cos(zy) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot (x+y) + z - 4 \frac{\partial z}{\partial x} y \sin(zy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{4y \sin(zy) - x - y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z - 4z \sin(zy)}{4y \sin(zy) - x - y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = \frac{z \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} - 4 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} y^2 \cos(zy)}{4y \sin(zy) - x - y}$$

$$= \frac{2z - 4z \sin(zy)}{(4y \sin(zy) - x - y)^2} - \frac{4z(z - 4z \sin(zy))y^2 \cos(zy)}{(4y \sin(zy) - x - y)^3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -5a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e = (-1; 0; 1)$$

$$Ae = (1; 2; -1)$$

$$A^2 e = (1; -2; \cancel{10a-1} \quad 3-10a)$$

$$\text{rang}\{e, Ae, A^2 e\} \leq 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} e & Ae & A^2 e \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} e & Ae & A^2 e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3-10a \end{vmatrix} =$$

$$2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} - 10a \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 20a = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 20a = 20a - 8$$

$a = 0,4$

$$20a = 8$$

Вектора e, Ae не коллинеарны $\Rightarrow$ образуют
 2-мерное подпространство. $Ae \in \langle e, Ae \rangle \Rightarrow$ пр.-во
 инвариантно относ. оператора A .
 при $a = 0,4$ Ответ: $a = 0,4$

	0	1	Λ
q_0	$0 q_0 R$	$1 q_0 R$	$\Lambda q_1 L$
q_1	$\Lambda q_3 L$	$\Lambda q_3 L$	$1 q_2 L$
q_2	$1 q_2 L$	$0 q_2 L$	$1 q_1 L$
q_3	$\Lambda q_4 L$	$0 q_2 L$	$1 q_1 L$
q_4	$1 q_4 L$	$0 q_4 L$	$\Lambda \text{ Halt } R$

~~Псевдокод:~~

~~q_0 : while(*p) p++;~~

~~$p--;$~~

~~q_1 : while(!*p)~~

~~{~~

~~*p-- = ~~1~~ '1';~~

~~while(*p)~~

~~q_2 : while(*p)~~

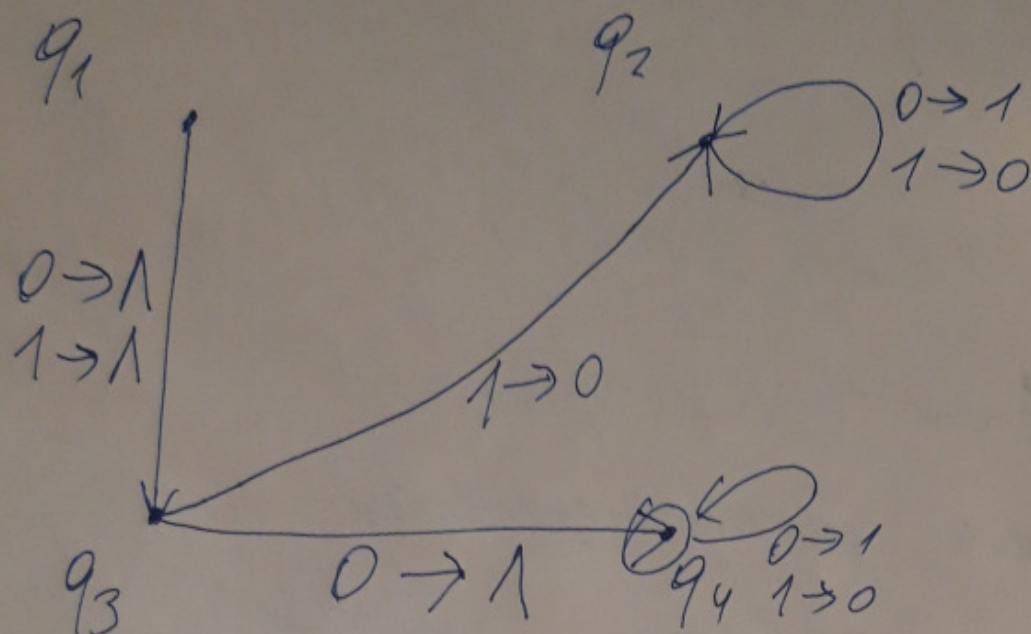
~~*p-- $\neq$ 1;~~

~~Заметим, что~~ MT работает в 2 этапа:

1. Проход вправо в состоянии q_0 , затем MT выставляет карточку на правый символ и переходит в q_1 .

2. Состояния $q_1 - q_4$ реализуют ДКА перебора, MT завершается если доходит до конца (начала) в состоянии q_4 , иначе записывается в состояние q_1, q_2 .

Эквивалентный ДКА (проход справа налево) 4/11



Переходы по 1 из $q_1 - q_3$ не ~~пр~~ отмечены, т.к. после их выполнения МТ всё равно заучивается.

Таких образцов:

1. МТ принимает все строки вида 1^*0^* и не принимает все остальные.
2. Последние 2 символа отбрасываются, остальные заменяются на противоположные.
3. Выход 0110 может получиться на входах 100100 и 100101, и только на них.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + x \\ \dot{y} = -y - \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} \cancel{2} & 1 & 2 \\ \cancel{1} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = 0 \Rightarrow x = k(2j - 1)$$

логична замена переменных:

$$\begin{cases} x = 2u + v \\ y = 2v - u \end{cases} \quad \begin{cases} v = \frac{1+2y}{5} \\ u = \frac{2x-y}{5} \end{cases}$$

$$\dot{u} = \frac{2\dot{x} - \dot{y}}{5} = \frac{4y + 2x - y - \frac{x}{2}}{5} = \frac{6v - 4u + 3u + 15v}{5} = 1,5v$$

$$\dot{v} = \frac{\dot{x} + 2\dot{y}}{5} = \frac{2y + x - 2y - x}{5} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= u(0) + 1,5v(0)t \\ v(t) &= v(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{точки равновесия при } v=0 \\ (\text{неустойчивое})$$

$$\begin{aligned} x(t) &= 2u(t) + v(t) = 2u(0) + v(0) + \frac{3}{2}v(0)t = \\ &= x(0) + \cancel{7} \cdot \frac{1}{6}x(0)t + 1,2y(0)t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= 2v(t) - u(t) = 2v(0) - u(0) - 1,5v(0)t = \\ &= y(0) - 0,3x(0)t - 0,6y(0)t \end{aligned}$$

6/11

$(0, 0) \rightarrow$ точка регулярного равновесия

$(-2, -2) \rightarrow$ не точка равновесия, $\begin{cases} \dot{x}(t) = -2 - 3,6t \\ \dot{y}(t) = -2 + 1,8t \end{cases}$

$(2, 0) \rightarrow$ не точка равновесия, $\begin{cases} \dot{x}(t) = 2 + 1,2t \\ \dot{y}(t) = -0,6t \end{cases}$

$(4, -2) \rightarrow v=0 \Rightarrow$ точка регулярного равновесия
№ 6

Пронумеруем вершины от 0 до $N-1$
в порядке следования по циклу C . Тогда
2 вершины соседствен ребром $\Leftrightarrow$

$$(i - j) \bmod N \in \{N-2, 1, 0, 1, 2\}.$$

Заметим, что вершины 0, 1, 2 попарно соседственны, поэтому дуги должны быть окрашены в 3 разных цвета. Обозначим через C_i

цвет i -й вершины. Заметим, что $C_i \neq C_{i+1}$, $C_i \neq C_{i+2}$,
т.е. $C_{i+1} \neq C_{i+2} \forall i$. Аналогично $C_{i+3} \neq C_{i+1}$, $C_{i+3} \neq C_{i+2}$
 $\forall i$. Если цветов всего 3, то значит, что

$$C_i = C_{i+3} \forall i. \text{ Отсюда } C_{6k} = C_0, \text{ но } (0-6k) \equiv 2 \pmod{6k+2},$$

~~поэтому~~ поэтому $C_{6k} \neq C_0$. Противоречие
 $\Rightarrow$ раскрасить граф в 3 цвета невозможно.

Покажем, что граф всегда можно 7/11 раскрасить в 4 цвета.

Для этого применим конструктивный алгоритм.

1. Если $k \equiv 2$, то $6k+2 \equiv 4$. Покажем $c_i = i \bmod 4$, заметим, что расстояние между одинаковыми цветами не меньше 4.
2. Если $k \not\equiv 2$, то покажем $c_i = \begin{cases} i \bmod 3, & i < 6 \\ (i+2) \bmod 4, & i \geq 6 \end{cases}$

Немного заметим, что при такой раскраске ~~тогда~~ вершины одного цвета ~~находятся~~ находятся на расстоянии не меньше 3. (Для этого заметим, что:

$$c_i = \begin{cases} i \bmod 3, & i < 9 \\ (i+2) \bmod 4, & 9 \leq i \leq 6k+3. \end{cases}$$

Любая пара вершин на расстоянии не больше 2. Если от вершины пойдём целых k в одну из диагоналей $\Rightarrow$ раскрашена в разные цвета.

Таким образом, $\chi(G_{6k+2}) = 4$, $\max_{k \in \mathbb{N}, k \geq 18} \chi(G_{6k+2}) = 4$

Ответ: 4

$$X_i \sim \text{Pois}(3) \Leftrightarrow P(X_i = n) = \begin{cases} (1-e^{-3}) \cdot e^{-3n}, & n+1 \in \mathbb{N} \\ 0, & n+1 \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

$$E X_i = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-e^{-3}) \cdot e^{-3n} \cdot n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n+1} (1-e^{-3}) e^{-3n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} (1-e^{-3}) \cdot e^{-3n} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-3k} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (1-e^{-3}) \cdot e^{-3n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-3k} = \frac{e^{-3}}{1-e^{-3}}$$

$$E(X_i^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-e^{-3}) \cdot e^{-3n} \cdot n^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^n (1-e^{-3}) \cdot e^{-3n} \cdot n = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} (1-e^{-3}) \cdot e^{-3n} \cdot n =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot e^{-3k} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (1-e^{-3}) \cdot e^{-3n} + e^{-3k} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (1-e^{-3}) \cdot e^{-3n} \cdot n =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(k \cdot e^{-3k} + e^{-3k} \cdot \frac{e^{-3}}{1-e^{-3}} \right) =$$

$$= \left(\frac{e^{-3}}{1-e^{-3}} \right)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot e^{-3k} = \left(\frac{e^{-3}}{1-e^{-3}} \right)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-3n} =$$

$$= \left(\frac{e^{-3}}{1-e^{-3}} \right)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-3k}}{1-e^{-3}} = \frac{e^{-3}}{(1-e^{-3})^2}$$

9/11

$$Dx_i = E(x_i^2) - (Ex_i)^2 = \frac{e^{-3}}{(1-e^{-3})^2}$$

Обозначим $\xi_i = x_{2i+1} - x_{2i}$.

$$E\xi_i = Ex_{2i+1} - Ex_{2i} = 0$$

$$D\xi_i = Dx_{2i+1} + Dx_{2i} = \frac{2e^{-3}}{(1-e^{-3})^2}$$

~~то есть~~

$$\begin{aligned} \text{С. в. } \eta_k &= \frac{\sum_{i=1}^k \xi_i}{\sqrt{k}} \text{ имеем } E = \frac{\sum_{i=1}^k E\xi_i}{\sqrt{k}} = 0, \\ D &= \frac{\sum_{i=1}^k D\xi_i}{k} = \frac{k \cdot \frac{2e^{-3}}{(1-e^{-3})^2}}{k} = \frac{2e^{-3}}{(1-e^{-3})^2} \end{aligned}$$

Обозначим $\sigma = \sqrt{\frac{2e^{-3}}{(1-e^{-3})^2}}$. Тогда $E \frac{\eta_k}{\sigma} = 0$, $D \frac{\eta_k}{\sigma} = 1$.

По ЦБЧ распр. - ~~и~~ ~~есть~~ посл. - ми с. в. такою
была ~~была~~ сходится к нормальному распределению
 $N(0, 1)$.

$$\begin{aligned} \text{Заметим, что } \left| \sum_{k=1}^n x_{2k+1} - \sum_{k=1}^n x_{2k} \right| &= \left| \sqrt{n} \cdot \eta_k \right| = \\ &= \left| \sigma \sqrt{n} \cdot \frac{\eta_k}{\sigma} \right|. P\left(\left| \sigma \sqrt{n} \cdot \frac{\eta_k}{\sigma} \right| < \sqrt{n}\right) = P\left(\left| \frac{\eta_k}{\sigma} \right| < \frac{1}{\sigma}\right) = \\ &= P\left(\frac{\eta_k}{\sigma} < \frac{1}{\sigma}\right) - P\left(\frac{\eta_k}{\sigma} < -\frac{1}{\sigma}\right) \rightarrow \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{e^{-1.5}}{1-e^{-3}}\right) - \Phi\left(-\frac{e^{-1.5}}{1-e^{-3}}\right) \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{5} f(-5) + c f(0) + \frac{1}{5} f(5)$$

$$\text{Suponhamos } f(x) = ax^3 + bx^2 + dx + e.$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \left(\frac{a}{4} x^4 + \frac{b}{3} x^3 + \frac{d}{2} x^2 + ex \right) \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{a}{4}(1-1) + \frac{b}{3}(1+1) + \frac{d}{2}(1-1) + e(1+1) =$$

$$= \frac{2b}{3} + 2e$$

$$\frac{1}{5} f(-5) + c f(0) + \frac{1}{5} f(5) =$$

$$= \frac{a}{5} \left(\frac{125}{5} \right) + \frac{b}{5} \left(\frac{125}{3} \right) + \frac{d}{5} \left(\frac{125}{5} \right) + \frac{e}{5} + c e + \frac{a}{5} \left(\frac{125}{5} \right) + \frac{b}{5} \left(\frac{125}{3} \right) + \frac{d}{5} \left(\frac{125}{5} \right) + \frac{e}{5} =$$

$$= \frac{2b}{5} \cdot \frac{125}{3} + \left(c + \frac{2}{5} \right) e = \frac{2b}{3} + e$$

$$c = 0,6, \quad \xi^2 = \frac{5}{3}, \quad \xi = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\int_{-1}^1 x^4 dx = \left(\frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5}$$

$$\int_{-1}^1 x^4 \approx \frac{1}{5} \cdot \frac{125}{5} + c \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot \frac{125}{5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{125}{5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{9}$$

$$\left| \frac{2}{5} - \frac{10}{9} \right| = \left| \frac{18}{45} - \frac{50}{45} \right| = \frac{32}{45}$$

$$\text{Ombrem: } \frac{32}{45}$$

$$u_{tt} = \frac{1}{2} u_{xx}$$

$$u(x, t) = f\left(x + \frac{t}{2}\right) + g\left(x - \frac{t}{2}\right)$$

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = \frac{1}{2} \cos(3x)$$

$$u_x(x, 0) = \frac{1}{2}(f'(x) - g'(x)) = -\frac{1}{8} \sin(3x) - 2$$

$$f'(x) - g'(x) = -1,5 \sin(3x) - 18$$

$$f(x) - g(x) = -\frac{\cos(3x)}{2} - 18x$$

$$f(x) = -18x$$

$$g(x) = 18x + \frac{\cos(3x)}{2}$$

$$u(x, t) = -18\left(x + \frac{t}{2}\right) + 18\left(x - \frac{t}{2}\right) + \frac{\cos\left(3x - \frac{3t}{2}\right)}{2}$$

On Bern: $u(x, t) = \frac{\cos\left(3x - \frac{3t}{2}\right)}{2} - 2t$